NUMERI DI MACCHINA

- $x \in \mathbb{R}$ $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 2$

  $\exists!\ b \in \mathbb{Z}$ $q = \frac{|x|}{\beta^b}$, $q \in [\beta^{-1}, 1]$ oppure

  $\exists!\ s, b \in \mathbb{Z}$, $s \in \{0,1\}$, $q \in [\beta^{-1}, 1]$: $x = (-1)^s \beta^b q$

- Insieme dei numeri di macchina

$$F(\beta, m) = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^s \beta^b q,\ s \in \{0,1\},\ b \in [\beta^{-1}, 1),$$
$$q = 0, c_1 c_2 \dots c_m\} \cup \{0\}$$

- Proprietà di $F(\beta, m)$

  1) $F(\beta, m) \subset \mathbb{Q}$ (dimostrazione)
  2) $F(\beta, m)$ è simmetrico rispetto a 0 (dimostrazione ?)
  3) $\sup F(\beta, m) = +\infty$ e $\inf F(\beta, m)$
  4) Gli elementi di $F(\beta, m)$ sono punti isolati, tranne 0, che è di accumulazione; infatti, $a_k = \beta^{-k} q$ converge a 0 per $k \to \infty$

- Funzione successore e predecessore

  $\sigma : M \setminus \{0\} \to M \setminus \{0\}$

  $\sigma(\xi) =$ l'elemento di $F(\beta, m)$ successivo a ξ

  0 no poiché è di accumulazione

  $\pi : M \setminus \{0\} \to M \setminus \{0\}$

  $\pi(\xi) =$ l'elemento di $F(\beta, m)$ precedente a ξ

  $\pi(\xi) = \sigma^{-1}(\xi)$

  $\sigma(\xi) = -\pi(-\xi)$

$$\frac{\sigma(\xi) - \xi}{\beta^b} = \beta^{-m}, \text{ poiché } \sigma(\xi) - \xi = \beta^{b-m}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8313126
Tel. 338 9837745


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

- Funzione arrotondamento

$rd : \mathbb{R} \to M$

$X \in \mathbb{R}$, $rd(x)$ = elemento di M più vicino a X, se esiste

Se β è pari

$rd(x)$ = quello dei due elementi di M adiacenti a X, la cui funzione termina con cifra pari

Se β è dispari, non importa, poiché $rd(x)$ funziona male

- Proprietà di $rd(x)$

1) $rd(x)$ è crescente, ossia $X < y \Rightarrow rd(x) \leq rd(y)$

2) $rd(x)$ è dispari, ossia $rd(x) = -rd(-x)$

3) $X \in M \iff rd(x) = X$

4) $rd(x) = 0 \iff X = 0$, poiché punto di accumulazione

- Funzioni errore

$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\delta(X) = rd(x) - X$ (errore assoluto)

$\varepsilon : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$\varepsilon(X) = \dfrac{rd(x) - X}{X}$ (errore relativo)

δ è dispari, ε è pari

$$|\delta(X)| = |rd(x) - X| \leq \frac{1}{2}\beta^{e-m}$$

$$|\varepsilon(X)| = \left|\frac{rd(x) - X}{X}\right| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-m}$$

(teorema delle stime di δ e ε)

$rd(X) = X + \delta(X)$ (perturbazione additiva)

$rd(X) = X(1 + \varepsilon(X))$ (perturbazione moltiplicativa)

MASTER COPY

- Funzioni predefinite

1) pseudo-operazioni aritmetiche

$\oplus, \ominus, \otimes : F(\beta,m) \times F(\beta,m) \longrightarrow F(\beta,m)$

$\xi_1 \oplus \xi_2 = rd(\xi_1 + \xi_2)$

$\xi_1 \ominus \xi_2 = rd(\xi_1 - \xi_2)$

$\xi_1 \otimes \xi_2 = rd(\xi_1 \xi_2)$

$\oslash : F(\beta,m) \times F(\beta,m) \setminus \{0\} \longrightarrow F(\beta,m)$

$\xi_1 \oslash \xi_2 = rd(\xi_1 / \xi_2)$

2) funzioni elementari

Funzioni come log, exp, sen, cos, ecc. che vanno da $\Omega \subset F(\beta,m)$ a $F(\beta,m)$

3) confronti

Funzioni che confrontano i numeri, sono funzioni che vanno da $F(\beta,m) \times F(\beta,m) \longrightarrow \{0,1\}$

Sono funzioni esatte (?).

- Proprietà di pseudo-somma
  - simmetrica, ossia $\xi_1 \oplus \xi_2 = rd(\xi_1 + \xi_2) = rd(\xi_2 + \xi_1)$
  - non è associativa, ossia

$$(\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3 \neq \xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3)$$

  - $\forall \xi_1, \xi_2, \alpha : \xi_1 > \xi_2 \Longrightarrow \xi_1 \oplus \alpha \geq \xi_2 \oplus \alpha$
  - $\forall \xi \in F(\beta,m), \ \xi \oplus 0 = \xi$ (non è l'unico)

- Studio errore trasmesso dai dati

$$\varepsilon_1 = \frac{\xi - x}{x}$$ errore sui dati relativo

$$\varepsilon_d = \frac{f(\xi) - f(x)}{f(x)}$$ errore relativo trasmesso dai dati

$$\varepsilon_d = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x(1+\varepsilon_1)) - f(x)}{f(x)} = C_f(x, \varepsilon_1)$$

(funzione di condizionamento del calcolo di f in x)

Proprietà:

- $C_f(x, 0) = 0$
- $\lim_{\varepsilon_1 \to 0} C_f(x, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \frac{f'(\theta) \cdot x \cdot \varepsilon_1}{f(x)} = 0$
- $\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \frac{C_f(x, \varepsilon_1)}{\varepsilon_1} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \frac{f'(\theta) \cdot x}{f(x)} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$

- Studio dell'errore algoritmico relativo

$$\varepsilon_a = \frac{\varphi(\xi) - f(\xi)}{f(\xi)}$$ errore algoritmico relativo

con $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\varphi: M^m \to M$, $\xi \in M^m$, $\varphi(\xi) = rd(f(\xi))$

$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

$\varphi(\xi) = SEN\, x \oplus COS\, x$

$SEN\, \xi = rd(\operatorname{sen}(\xi)) = \operatorname{sen}(\xi)(1+\varepsilon_1)$

$COS\, \xi = rd(\cos \xi) = \cos(\xi)(1+\varepsilon_2)$

$\xi_1 \oplus \xi_2 = rd(\xi_1 + \xi_2) = (\xi_1 + \xi_2)(1+\varepsilon_3)$

$$\varepsilon_a = \frac{((1+\varepsilon_1)\operatorname{sen}\xi + (1+\varepsilon_2)\cos\xi)(1+\varepsilon_3) - (\operatorname{sen}\xi - \cos\xi)}{\operatorname{sen}\xi - \cos\xi} =$$

$S(\xi, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ (funzione di stabilità)

$S(\xi, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = C_f(\operatorname{sen}\xi, \cos\xi; \theta_1, \theta_2)$

(non dimostrato)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745